

## Barry Koren

Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek

Technische Universiteit Delft

Postbus 5058, 2600 GB Delft

Barry.Koren@cw.tn

## Inaugurale rede

# Stromende getallen

Dit jaar is het honderd jaar geleden dat de eerste bemane vlucht met een motorvliegtuig werd uitgevoerd, en ook honderd jaar geleden dat John von Neumann werd geboren. In dit artikel wordt, in een historisch perspectief, aandacht besteed aan het grote belang van beide gebeurtenissen voor de numerieke stromingsleer in het algemeen, en voor de numerieke aërodynamica in het bijzonder. Barry Koren gaat in zijn op 23 mei van dit jaar uitgesproken inaugurale rede in op de geschiedenis van de numerieke stromingsleer. Hij is deeltijdhoogleraar in het vakgebied Computational Fluid Dynamics aan de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek van de Technische Universiteit Delft.

Overal stromen gassen en vloeistoffen. Lucht stroomt om de aarde, om vliegtuigen, raketten en windmolens, en door onze longen. Water stroomt om de aarde en om schepen, benzine door motoren, en bloed door ons hart. De wetenschap die zich bezighoudt met de bestudering van de stroming van gassen en vloeistoffen heet stromingsleer, in het Engels *fluid dynamics*. Stromingsleer is een onderdeel van de natuurkunde. In het natuurkundeleeronderwijs op middelbare scholen wordt in het algemeen geen les gegeven in stromingsleer. Stromingsleer vereist daarvoor te veel voorkennis van vooral wiskunde. Op universiteiten wordt er wel onderwijs in gegeven, op technische universiteiten zelfs heel veel. Wil je bijvoorbeeld een vliegtuig, raket, ben-

zinemotor of kunsthart ontwerpen, dan kun je niet om stromingsleer heen.

Met name voor het ontwerpen van vliegtuigen is kennis en begrip van stromingsleer, aërodynamica in dit geval, van groot belang. Met uitzondering van de gevaarlijke zwaartekracht zijn alle krachten die in de vlucht op een vliegtuig werken, luchtkrachten. Het veilig door de lucht laten bewegen, over onze hoofden heen (figuur 1), van een vliegtuig, afgestankt met tonnen brandstof en aan boord een paar honderd passagiers, maakt een precieze kennis, begrip en ook beheersing van deze luchtkrachten van cruciaal belang, van *levensbelang!* Vliegen moet bovendien niet alleen veilig, maar ook nog eens zuinig en stil. Voor de luchtvaart- en ruimtevaarttechniek is aërodynamica echt onontbeerlijk.

### Experiment en theorie

Voor het onderzoeken van stromingen staan vandaag de dag zowel experimentele als theoretische middelen ter beschikking. Bij experimentele middelen kan in geval van aërodynamica worden gedacht aan windtunnels. De gebroeders Wright, die de eerste bemane motorvlucht uitvoerden (dit jaar precies honderd jaar geleden, figuur 2), hadden al de beschikking over een windtunnel, een zelfgemaakte. Windtunnelwerk heeft veel bezwaren die ik hier niet ga opnoemen, maar het geniet vertrouwen omdat het met echte luchtstromingen werkt en niet met denkbeeldige, zoals de theoretische aërodynamica. Ikzelf

heb destijds voor theoretische aërodynamica gekozen; experimentele aërodynamica is mij te moeilijk.

### Geschiedenis

Tegenwoordig wordt het technologische belang van theoretische aërodynamica, van theoretische stromingsleer in het algemeen, alom erkend. Vroeger echter was het voornamelijk een academische aangelegenheid, met resultaten die sterk afweken van experimentele waarnemingen. Technische toepassingen van stromingsleer ontwikkelden zich dan ook eerst vrijwel onafhankelijk van de theorie. Theoretische en technologische doorbraken hebben de kloof tussen theorie en experiment echter gedicht en er is nu sprake van een vruchtbare wisselwerking tussen beide.



Figuur 1 Boeing Sonic Cruiser boven de TU Delft.



Barry Koren

Het vliegtuig heeft hierbij een sterk stimulerende rol gespeeld.

Ik ga nu — met persoonlijk gekleurde zeventiende eeuwse — door de geschiedenis van de theoretische stromingsleer lopen, richting mijn vakgebied.

#### Hooggegrepen vernieuwingen

Theoretische stromingsleer heeft een roemrijke geschiedenis (zie bijvoorbeeld [1–3]). Vele grote geesten hebben in de loop der eeuwen hun tanden gezet in de bestudering van stromingen en daarmee stap voor stap het vak opgebouwd. Theoretische stromingsleer begint al bij Aristoteles (384–322 voor Christus), die de begrippen continuüm en luchtweerstand invoerde. Het *echte* begin is mijns inziens pas ruim 2000 jaar later, als de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler zijn bewegingsvergelijkingen voor de stroming van gasen en vloeistoffen publiceert [4], uitgaande van de Tweede Wet van Newton (massa  $\times$  versnelling = som van krachten werkend op die massa).

Eulers idee om de stroming van gasen en vloeistoffen te beschrijven in de vorm van partiële differentiaalvergelijkingen was een revolutionaire vernieuwing. (Een beknopte beschrijving van Eulers theoretische stromingsleerwerk is te vinden in [5].) Voor praktische toepassing waren deze vergelijkingen, thans bekend onder de naam Eulervergelijkingen, echter nog ongeschikt. Ze hielden namelijk geen rekening met wrijvingskrach-

ten, maar alleen met drukkrachten. Pas ongeveer een eeuw later, in 1845, stelde de Ier George Stokes stromingsvergelijkingen op die ook rekening houden met wrijving [6], vergelijkingen die voor het geval van een niet-samendrukbaar medium al in 1822 waren gevonden door de Fransman Claude Navier [7], en nu bekend staan onder de naam Navier-Stokesvergelijkingen.

Met de introductie van de Navier-Stokesvergelijkingen leek het probleem van het begrijpen en beheersen van een grote klasse stromingen onder handbereik. Het probleem was immers teruggebracht tot het wiskundig oplossen van een handvol fundamentele differentiaalvergelijkingen.

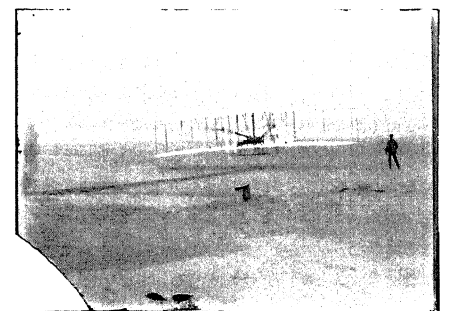
Hoewel de Navier-Stokesvergelijkingen grote vooruitgang brachten, bleek de analytische oplossing van de complete vergelijkingen, de 'oplossing met potlood en papier', te hooggegrepen. Het gevolg was het ontstaan van een groot aantal van Navier-Stokes afgeleide, vereenvoudigde vergelijkingen voor speciale gevallen die *wel* analytisch waren aan te pakken. Bovendien bleef een verschil bestaan tussen experimentele en theoretische stromingsleer. De eerste ontwikkelde zich sterk en onafhankelijk tijdens de industriële revolutie.

Het was paradoxaal om te zien dat de invoering van de Navier-Stokesvergelijkingen leidde tot een steeds grotere fragmentatie in verschillende stromingsmodellen, die *allemaal* de stroming beschreven van hetzelfde medium (in ons geval lucht); een the-

oretisch hoogst ongewenste situatie. Theoretische stromingsleer stagneerde langs een front van niet-lineaire problemen. Het doorbreken daarvan zou uiteindelijk pas in de tweede helft van de twintigste eeuw gebeuren, met numeriek-wiskundige methoden: met getallen, bij benadering, en ten koste van veel, vaak heel veel rekenwerk. Een sleutelrol hierbij zou worden gespeeld door een uit Hongarije afkomstige wiskundige.

#### Baanbrekende ideeën uit Princeton

Budapest was in de jaren tien en twintig van de vorige eeuw een vruchtbare voedingsbodem voor wetenschappelijk talent. Dit jaar ook precies honderd jaar geleden stond er de



**Figuur 2** Glasplaatfoto van de eerste bemane motorvlucht (vliegafstand: 37 meter, vluchtduur: 12 seconden), Kitty Hawk, North Carolina, 10.35 u., 17 december 1903. Vooroverliggend op de onderste vleugel: Orville Wright. Meelopend om het vliegtuig zo nodig met de hand in evenwicht te houden: Wilbur Wright. Zichtbaar op de voorgrond onder andere: de rail waarop het vliegtuig is gestart en het bankje waarop de vleugel heeft gesteund. Dezelfde dag nog voerden de gebroeders Wright al een vlucht uit van 260 meter en 59 seconden!



**Figuur 3** In 1954 vond het Internationaal Mathematisch Congres in Nederland plaats. Een delegatie van internationaal gerenommeerde wiskundigen bezocht koningin Juliana (zie Nieuw Archief voor Wiskunde, juni 2003, pagina 117). Een gedeelte van deze groep werd daarna uitgenodigd voor de thee in de paleistuin; Von Neumann zit geheel links.

wieg van John von Neumann (figuur 4).

Als klein kind kreeg Von Neumann privé-onderwijs. Op zijn tiende ging hij voor het eerst naar school, naar het gymnasium, waar zijn talent voor wiskunde werd ontdekt. Hij kreeg er extra wiskundeonderwijs van wiskundigen van de Universiteit van Budapest, waaronder Fekete, een later bekend geworden zuiver wiskundige met wie Von Neumann zijn eerste wiskundeartikel schreef, op achttienjarige leeftijd. Hij was toen in feite al professioneel wiskundige. Von Neumann studeerde aan de Eidgenössische Technische Hochschule Zürich en de Universiteit van Budapest en promoveerde op tweeëntwintigjarige leeftijd. Aansluitend toog hij naar Duitsland waar hij doceerde aan universiteiten in Berlijn en Hamburg. Hij was daarbij vooral actief in de zuivere wiskunde: in de verzamelingenleer, algebra, maattheorie, topologie en groepentheorie. Hij droeg bij aan bestaand werk, de manier van werken om snel erkenning te verkrijgen. Vanaf het midden van de jaren dertig koos Von Neumann echter vooral voor de meer riskante manier van werken: geheel nieuwe wegen inslaan. Hij koos daarbij voor toegepaste wiskunde in de zin van wiskundigen als Hilbert en Courant. Dat wil zeggen: niet wiskunde toegepast op allerlei ad hoc problemen, maar de gerichte toepassing van wiskunde op andere wetenschappen, met name natuurkunde met zijn deelgebieden zoals de

aërodynamica. De snel verslechterende politieke situatie in Europa, van waaruit Von Neumann begin jaren dertig al was geëmigreerd naar Princeton, heeft een rol gespeeld bij deze keuze. Er was oorlogsdreiging; er ontstond een steeds grotere behoefte aan antwoorden op concrete vragen vanuit met name de ingenieurspraktijk; van wiskunst naar wiskunde.

Von Neumann was niet de enige die begin jaren dertig uit Europa vertrok. Göttingen hield vanaf 1933 definitief op met haar bestaan als wereldcentrum van de wiskunde, nadat de Naziregering sterke beroepsbeperkingen had opgelegd aan wetenschappers van joodse komaf. Princeton werd het nieuwe Mekka. (Voor een gedetailleerde beschrijving van deze teloorgang van Göttingen, zie Richard Courants biografie [8].)

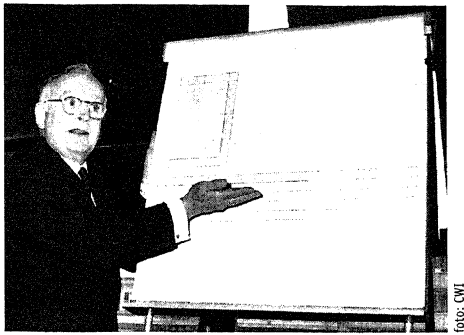
Werkte Von Neumann voor de oorlog nog aan een wiskundige basis voor de vergelijkingen van de statistische mechanica, de Boltzmannvergelijkingen, in de oorlog 'verlaagde' hij zich zelfs tot het ontwikkelen van numeriek-wiskundige oplosmethoden voor de Eulervergelijkingen. Heel origineel was hierbij zijn idee om mogelijke discontinuïteiten in de Euleroplossingen uit te rekenen zonder daarbij expliciet sprongrelaties op te leggen. In plaats daarvan stelde Von Neumann voor om kunstmatige (numerieke) viscositeit te introduceren, zodanig dat de sprongen op fysisch correcte wijze vanzelf

te voorschijn komen: *shock capturing*, tegenwoordig een standaardtechniek. En passant kwam hij ook met een originele methode voor het analyseren van de stabiliteit van numerieke berekeningen, een Fouriermethode, nu ook een standaardtechniek.

In 1944 ontstond de dringende noodzaak om de numeriek-wiskundige methoden, die Von Neumann inmiddels op papier had ontwikkeld, daadwerkelijk toe te passen; op automatische rekenmachines, *computers*, apparaten die nog niet bestonden. Deze noodzaak deed Von Neumann besluiten om ook te gaan werken aan de ontwikkeling van de computer. In 1944 en 1945 verrichtte hij baanbrekend werk door zijn numerieke wiskundemethoden voor het oplossen van een stromingsprobleem te vertalen in een verzameling instructies voor een nog denkbeeldige computer. Deze instructies zouden niet aan de computer moeten worden doorgegeven door iets in de *opbouw* (zeg de bedrading) van de computer aan te passen. Von Neumann stelde voor om computers te voorzien van een zo algemeen mogelijke opbouw. Ook stelde hij voor om rekeninstructies in hun totaliteit op te slaan in het geheugen van de computer, bij de andere voor de berekening relevante gegevens (invoergegevens, tussenresultaten en eindresultaten). Twee nog steeds algemeen gehanteerde principes. In 1949 werd de eerste computer gerealiseerd die geheel voldeed aan Von Neumanns interne programmeren-geheugenprincipes: de EDSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator), over-



**Figuur 4** John von Neumann, 1903–1957, Hongaars-Amerikaans wiskundige, grondlegger van Computational Fluid Dynamics.



**Figuur 5** Aad van Wijngaarden, 1916–1987, Delfts werktuigbouwkundig ingenieur, hoofd Rekenafdeling en oud-directeur van het CWI, Nederlands computerpionier.

gens in Europa, aan Cambridge University.

Vóór Von Neumann combineerden Richardson, en Courant en collega's al theoretische stromingsleer en numerieke wiskunde [9–10], maar nog zonder ideeën over computers; zonder informatica. Numerieke stromingsleer, in het Engels *Computational Fluid Dynamics* — onder vakgenoten kortweg *CFD* — is een combinatie van drie vakken: theoretische stromingsleer, numerieke wiskunde en informatica. Von Neumann haalde dit derde vak, de informatica, erbij en kan daarom met recht de vader van *CFD* worden genoemd.

Een gedetailleerde beschrijving van Von Neumanns bijdragen aan het wetenschappelijk rekenen met computers wordt gegeven door Aspray [11]. Von Neumann heeft in zijn wetenschappelijke carrière nog meer baanbrekend werk verricht: details kunnen worden gevonden in de overzichtelijke wetenschappelijke biografie van de hand van Ulam [12].

Als gevierd wiskundige jarenlang van de ene naar de andere wetenschappelijke plek reizend, met bijbehorende sociale en politieke verplichtingen, had Von Neumann nauwelijks tijd om zijn ideeën eens goed op te schrijven. Over shock capturing en de hiervoor genoemde stabiliteitsanalyse werd verlaat en in slechts één artikel gepubliceerd [13]. Op zijn vele reizen deed Von Neumann ook Nederland aan. In 1954 was hij gastspreker tijdens het in Amsterdam gehouden *International Congress of Mathematicians*. Verbonden aan dit congres was, voor een select groepje deelnemers waaronder Von Neumann, een theevisite bij koningin Juliana (figuur 3).

#### Pionierswerk in Amsterdam

Informatica kwam opzetten als nieuw vak. Nederland heeft bij de ontwikkeling van informatica aanvankelijk geen leidende rol kunnen spelen, maar volgde wel op de voet en werd al snel mede-toonaangevend. In 1946 werd te Amsterdam opgericht: het Mathematisch Centrum. Doel van dit nieuwe instituut was

de beoefening van zuivere en toegepaste wiskunde te bevorderen teneinde te verhogen, ik citeer, “het welvaarts- en beschavingspeil in Nederland en de bijdragen van Nederland aan de internationale cultuur”. Geen pure ivoren toren.

Het Mathematisch Centrum heet nu Centrum voor Wiskunde en Informatica: het CWI. Het is mijn Amsterdamse werkplek en volgens één van m'n kinderen het “Circus van Wereldvreemde Ingenieurs”.

De oprichting van het CWI, zo noem ik het vanaf hier voor het gemak, is niet zonder strijd verlopen. De meest prominente Nederlandse wiskundige in die tijd, L.E.J. Brouwer, huldigde het standpunt dat wiskunde onverschillig staat tegenover natuurwetenschappen en zelfs afwijzend tegenover techniek; een achterhaald standpunt sinds het werk van wiskundigen als Hilbert, Courant en Von Neumann. Brouwer wilde met het op te richten CWI Amsterdam het nieuwe Göttingen op het gebied van de zuivere wiskunde laten worden. Het is er niet van gekomen. Brouwer is opgeofferd aan de oprichting van het CWI, aldus zijn biograaf [14].

De oprichters van het CWI hadden gehoord over Von Neumanns ideeën voor apparaten die zo zelfstandig mogelijk een serie berekeningen zouden moeten kunnen uitvoeren. Zij wilden bij het CWI een rekenafdeling met als twee taken: het ontwikkelen van een grote rekenmachine en het uitvoeren van geavanceerd rekenwerk. Voor het op poten zetten van zo'n afdeling werden de oprichters geattendeerd op Aad van Wijngaarden, afgestudeerd en gepromoveerd in Delft, in de school van Burgers en Biezeno. Van Wijngaarden (figuur 5) is de eerste wetenschappelijk medewerker die bij het CWI wordt aangesteld, in 1947.

In hetzelfde jaar gaat hij op studiereis en bezoekt daarbij onder andere Von Neumann in Princeton. Van Wijngaarden en zijn medewerkers ontwerpen en bouwen vervolgens de eerste Nederlandse computer: de *Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam I* (de ARRA I).

Nieuwe computers worden ontwikkeld en gebouwd, in enkelvoud, in 1955 exclusief voor Fokker: de *Fokker Elektronische Rekenmachine Type ARRA* (FERTA). Bij het uitvoeren van rekenwerk op deze eerste computers is nog veel mensenwerk vereist. Op het CWI gebeurt dat door jonge vrouwen, die door Van Wijngaarden wiskundig zijn geschoold.

Een rekentechnisch hoogtepunt is een grote opdracht van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium in Amsterdam ten behoeve van de

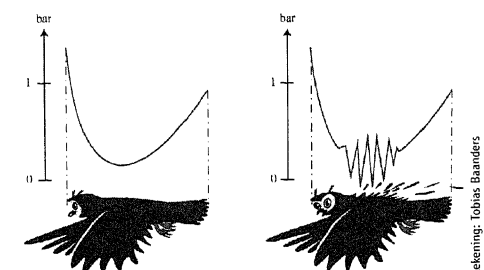
ontwikkeling van de Fokker Friendship, een rekenopdracht waaraan door Van Wijngaarden van 1949 tot 1951 met zijn rekenaarsters wordt gewerkt. Het rekenprobleem betreft trillingen van een vliegtuigvleugel in subsone stroming: *flutter*. Het eerste rekenwerk is nog erg machinegebonden; voor iedere berekening moeten in de computer nog kabeltjes in pluggen worden gestoken. Met de realisatie van de door Von Neumann voorgestelde interne programmering richt de aandacht zich echter helemaal op het bedenken van algoritmen en het omzetten daarvan in computerprogrammatuur. Edsger Dijkstra, de latere Turing Award winnaar, treedt in dienst bij het CWI als Nederlands eerste computerprogrammeur. Van Wijngaarden en Dijkstra drukken internationaal hun stempel op de informatica met hun bijdragen aan de ontwikkeling van de programmeertaal *Algol 60*, Van Wijngaarden later nog eens met *Algol 68*. Voor zijn pionierswerk ontvangt Van Wijngaarden in 1979 een eredoctoraat aan de TU Delft. Een boeiende beschrijving van de ontwikkeling van het wetenschappelijk rekenen in het naoorlogse Nederland, in het bijzonder bij het CWI en aan de TU Delft, is te vinden in het proefschrift van Gerard Alberts [15].

CFD-onderzoek op basis van de Euler- of Navier-Stokesvergelijkingen, en van hetzelfde fundamentele karakter als dat van Von Neumann, wordt in de periode 1945–1960 in Nederland echter nog niet gedaan. Voor dat soort werk moeten we naar de Sovjet Unie van de jaren vijftig.

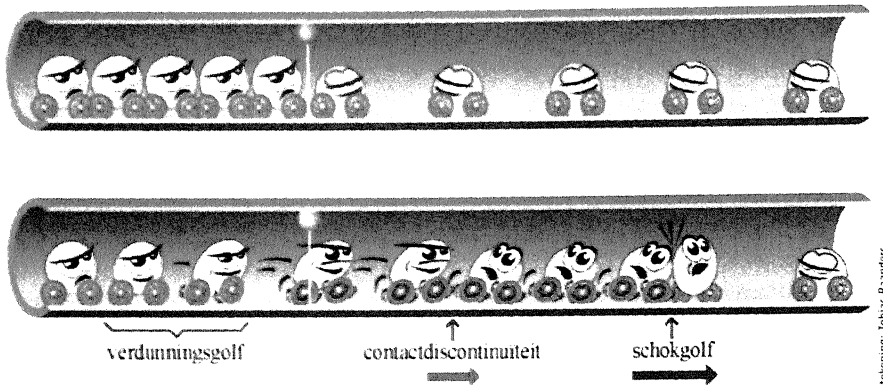
#### Een briljant idee uit Moskou

Een flink deel van de wereldwijd gebruikte Euler- en Navier-Stokesprogrammatuur is mede gebaseerd op één tijdschriftartikel [16], door de toen nog jonge Russische wiskundige Sergei Konstantinovich Godunov gedestilleerd uit zijn proefschrift.

Godunov heeft het volgende voorgesteld. Stel je hebt een buis met daarin een wandje dat een linker gas, dat een constante druk heeft, scheidt van een rechter gas met bijvoorbeeld een lagere, eveneens constante druk



**Figuur 6** Goed en fout drukverloop. Links: zonder wiggles. Rechts: met wiggles.



**Figuur 7** 'Schokbuis'. Boven: rusttoestand met in linker en rechter gedeelte: hoge respectievelijk lage druk en dichtheid. Onder: bewegingstoestand met naar rechts lopende schokgolf en contactdiscontinuïteit en naar links lopende verduunningsgolf.

(figuur 7, boven). Als het wandje plotseling wordt weggehaald, dan zal het linker gas het rechter gas naar rechts duwen; het scheidingsvlak tussen de twee gassen, de contactdiscontinuïteit, loopt naar rechts. Twee andere golven die door de buis gaan lopen zijn twee drukgolven: een voor de contactdiscontinuïteit uitlopende schokgolf en een naar links lopende verduunningsgolf (figuur 7, onder).

De Eulerstroming in deze buis, een zogenaamde schokbuis, is al in de negentiende eeuw door de Duitse wiskundige Riemann exact uitgerekend, met potlood en papier [17]. (Gilbert Duivesteyn, een afstudeerder van me, heeft op basis van Riemanns werk een exacte, interactieve Java applet geschreven voor schokbuisproblemen, te downloaden via [www.hsa.lr.tudelft.nl/~gilbert/](http://www.hsa.lr.tudelft.nl/~gilbert/).) Godunov heeft nu voorgesteld om ter berekening van een buisstroming met meer in de ruimte uitgestrekte variatie in de beginoplossing, de buis te verdelen in denkbeeldige hokjes – celletjes – met per celletje een bij goede benadering constante stromingsoplossing en met elk afzonderlijk celwandje op te vatten als het ene wandje uit de schokbuis van zojuist. Wil je de interactie weten tussen de stromingsoplossingen in twee naburige cellen, dan denk je het denkbeeldige celwandje tussen de twee cellen weg en berekent daar ter plekke de Riemannoplossing en daarmee het lokale transport van massa, impuls en energie.

Je doet dit op alle celwandjes. Het netto transport in ieder celletje is daarmee bekend, een tijdstap kan worden gemaakt. Een doodgewone methode en een erg simpel stromingsprobleem denkt u misschien. Wel, dat lijkt maar zo! Kun je dit goed, dan ben je al een heel eind op weg om de stroming om een vliegtuig of raket uit te rekenen. Het ongewone en slimme van de methode is namelijk dat op het laagste discrete niveau, dat van cel-

wandjes, zo veel mogelijk natuurkunde in de methode is gebouwd, niet slechts numerieke wiskunde.

Hoe meer celletjes, hoe beter de nauwkeurigheid, echter ook hoe duurder de som. Godunov had nog geen computers ter beschikking, wel rekenmeisjes die Godunov en collega-promovendi maar rare jongens vonden, en die werden beloond voor de hoeveelheid berekeningen die ze uitvoerden, *good of fout*. Ook nog geen echte CFD dus!

In 1997 ontving Godunov een eredoctoraat van de University of Michigan en was er op het Department of Aerospace Engineering een symposium te zijner ere. In een anderhalf uur durende voordracht gaf Godunov hierbij een kijkje in de keuken van zijn onderzoek van toen, werk waarvan men het strategisch belang destijds in de Sovjet Unie niet heeft onderkend. De voordracht, een historische gebeurtenis, is gepubliceerd in de *Journal of Computational Physics* [18–19].

Een tweede belangrijk resultaat in Godunovs klassieke artikel uit 1959 is zijn bewijs dat het onmogelijk is om een lineaire, nauwkeuriger dan eerste-orde methode te maken zonder last te krijgen van fysisch onjuiste 'wiebels' in de oplossing: *wiggles* (figuur 6). In een zogenaamde eerste-orde nauwkeurige methode wordt de oplossing *twee keer* zo nauwkeurig en blijft *vrij* van wiggles, als de celletjes twee keer zo klein worden genomen. Bij een tweede-orde nauwkeurige methode wordt de oplossing dan maar liefst *vier keer* zo nauwkeurig, maar mogelijk helaas wel behept met wiggles.

Wiggles kunnen in de praktijk heel vervelend zijn. Een geluidssnelheidsberekening bijvoorbeeld in één enkel celletje waarin de druk negatief is ten gevolge van een wiggle, kan de hele stromingsberekening doen stuklopen. Het wiggleprobleem bestaat niet alleen voor Godunovs methode: het is algemeen. Wel eigen voor Godunovs methode is

dat deze rekenintensief is; op ieder celwandje wordt het ingewikkelde Riemannprobleem exact opgelost.

#### *Technology pushes uit Leiden*

Het heeft zo'n twee decennia geduurd eer er goede remedies werden gevonden tegen wiggles en tegen de hoge kosten van het Godunovalgoritme. De hulp kwam van een Nederlandse sterrenkundige.

In het heelal bevinden zich grote waterstofwolken. Simulatie van de stroming van deze waterstof levert informatie op over het ontstaan van sterrenstelsels. De letterlijk astronomische snelheden en drukken die bij deze berekeningen kunnen optreden stellen hoge eisen aan de nauwkeurigheid en vooral aan de robuustheid van de te gebruiken rekenmethoden. In een reeks van publicaties in de jaren zeventig zijn door de toen Leidse sterrenkundige Bram van Leer (figuur 8) methoden voorgesteld die tweede-orde nauwkeurig zijn en geen wiggles toelaten. Vijfde en laatste artikel in deze reeks is [20].

Bovendien introduceerde Van Leer een renefficiënt alternatief voor het dure Godunovalgoritme [21]. Twee echte *technology pushes*, niet alleen voor de sterrenkunde maar ook voor de luchtvaart- en ruimtevaarttechniek, en voor andere disciplines. In 1990 ontving Van Leer aan de Vrije Universiteit Brussel een eredoctoraat voor dit werk.

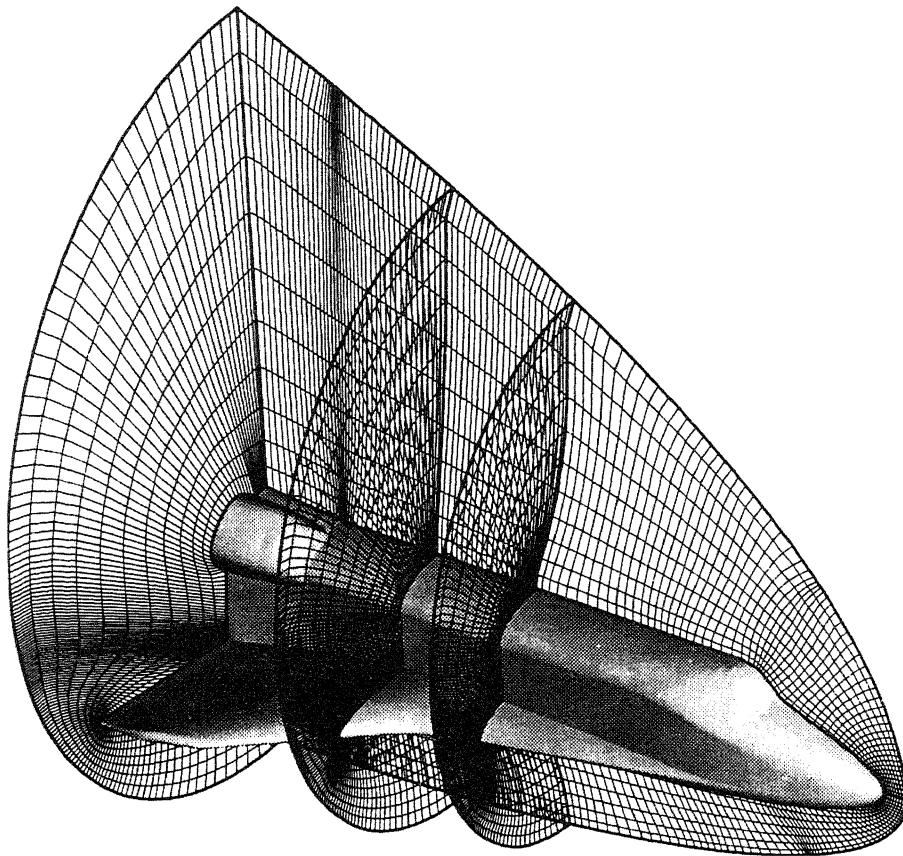
#### *Efficiënte oplossingsalgoritmen uit Delft en Amsterdam*

Hoe gaat dat nu in grote lijnen, een Euler- of Navier-Stokesberekening voor een vliegtuig? Wel, het denkbeeldige luchtruim rondom het eveneens denkbeeldige vliegtuig wordt tot op grote afstand van het vliegtuig opgedeeld in bijvoorbeeld tegen elkaar liggende zesvlakjes, 3D celletjes. Per celletje kan dan, net als in het 1D schokbuisvoorbeeld, worden berekend wat de netto instroom is van massa, impuls en energie (op ieder celwandje gebruikmakend van bijvoorbeeld het Godunovalternatief à la Van Leer). Hoe fijner het brei-



**Figuur 8** Bram van Leer





**Figuur 9** Doorsneden van een uit zesvlakjes opgebouwd rooster om de Space Shuttle.

werk van cellen om het vliegtuig — het rooster noemen we dat (figuur 9) — hoe nauwkeuriger dus de oplossing, maar ook hoe hoger de rekenkosten.

Een rooster van zo'n miljoen cellen voor een Euler- of Navier-Stokessom om een vliegtuig of raket heen is niet overdreven. Stel dat we een stationaire vlucht willen simuleren, dan hebben we per celletje op te lossen: vijf onderling gekoppelde, niet-lineaire, algebraïsche vergelijkingen. De verschillende celletjes zijn zelf ook onderling gekoppeld; wat een celletje uitstroomt, stroomt een buurcelletje in. Bij Navier-Stokes kan de stromingsoplossing in één celletje die in *alle* andere celletjes beïnvloeden. We kunnen in ons bescheiden voorbeeld te maken hebben met een stelsel van zo'n vijf miljoen gekoppelde, niet-lineaire, algebraïsche vergelijkingen. Het efficiënt oplossen van deze miljoenen vergelijkingen is een kunst apart. Vele efficiënte oplossingsalgoritmen zijn ontwikkeld. De meest efficiënte zijn de zogenaamde multiroosteralgoritmen. Multiroosteralgoritmen hebben een lineaire toename van de rekentijd met het aantal cellen. Dat is duur zult u misschien denken: 2, 3 of 4 keer zo veel rekenkosten voor een rooster met 2, 3 respectievelijk 4

keer zo veel cellen. U verwacht misschien kwantumkorting. Wel, die wordt in de numerieke wiskunde niet gegeven. Voor veel algoritmen geldt maar liefst:  $2^2, 3^2, 4^2, \dots$  keer zo veel rekenkosten voor een rooster met 2, 3, 4, ... keer zo veel cellen!

In Nederland is en wordt toonaangevend onderzoek gedaan aan multiroostermethoden; aan de TU Delft door Piet Wesseling en zijn groep, op het CWI door mijn leermeester Piet Hemker [33]. Zelf heb ik als promovendus ook bijdragen aan dit onderzoek kunnen leveren [34].

Het ontbreekt me aan ruimte om multiroostermethoden uit te leggen. Hier volgt slechts een hele korte schets, een gedegen uitleg wordt gegeven in [22–23]. Zij gegeven een fijn rooster waarop men een stroming wil uitrekenen. Een multiroostermethode maakt dan gebruik van een beperkt aantal grove hulproosters waarop de stromingsberekening niet nauwkeurig maar wel snel kan worden uitgevoerd; hoe grover, hoe sneller. Als analogon kunt u denken aan een schilder die, om een beetje op te schieten, een groot schilderij niet met één fijn penseeltje schildert maar ook met grove kwasten; de grofste, een brede kwast, voor bijvoorbeeld het opzetten van de

achtergrondkleur, de op-één-na grofste voor de eerste grote vlakken, ... , en het fijnste penseeltje voor alleen de kleinste details.

### Huidige stand van zaken in CFD

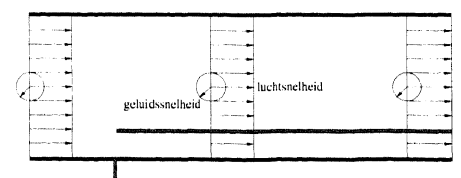
Ik wil u nu aan de hand van een voorbeeldje laten zien wat met CFD mogelijk is. Het betreft werk van Jeroen Wackers, een afstudeerder van me. Jeroen heeft 2D Eulerprogramma's ontwikkeld waarbij het rooster zich automatisch aan de stroming aanpast. Hier één van zijn resultaten van negen maanden hard werken. Beschouw het in figuur 10 gegeven kanaaltje met daarin, van links naar rechts stromend, een uniforme supersonische luchtstroming met een snelheid van drie maal de geluidssnelheid. U kunt hier denken aan bijvoorbeeld een gestileerde motorinlaat van een supersoon vliegtuig. In feite betreft het hier een standaardtestgeval. We laten het verticale klepje in de bodem van het kanaal (figuur 10) nu plotseling omhoog springen zodanig dat het tezamen met de in de stroming geplaatste horizontale plaat een drempel vormt die het kanaaltje plotseling gedeeltelijk afsluit.

In figuur 11 is een rekenresultaat van Jeroen gegeven; u ziet hoe de aanvankelijk uniform constante luchtdichtheid zich tezamen met het rooster tot een bepaald tijdstip heeft ontwikkeld.

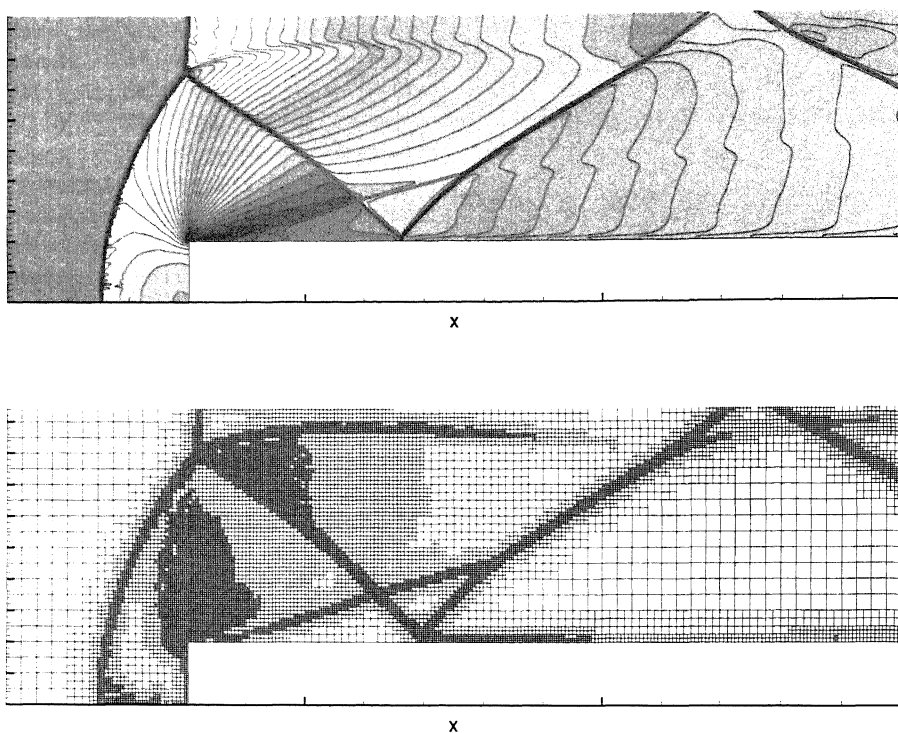
Jeroen heeft zijn rekenmethode zo goed mogelijk laten voldoen aan de vaak onderling strijdige eisen ten aanzien van numerieke stabiliteit, nauwkeurigheid, monotoniteit, en reken- en geheugenefficiëntie. Zijn resultaten zijn onlangs gepresenteerd op een CFD-congres in Amerika [24].

### Boeken, tijdschriften en software

Twintig jaar geleden waren studieboeken over CFD nog witte raven. Tegenwoordig zijn er vele beschikbaar. Ook zijn er meerdere wetenschappelijke tijdschriften geheel of gedeeltelijk gewijd aan CFD. Bovendien is er vandaag de dag steeds meer kant-en-klare CFD-software te koop. Iedere editie van het maandblad *Aerospace America* bevat wel enige kleurige, paginavullende advertenties daarvoor. Een aardig overzicht over bijvoor-



**Figuur 10** 2D, Parallel kanaaltje met daarin een parallelle plaat en een nog openstaand verticaal klepje.



**Figuur 11** Rekenresultaat enige tijd na instantaan afsluiten van onderste deel van kanaaltje. *Boven*: isolijnen van luchtdichtheid. Als het verticale klepje nog openstaat is de luchtdichtheid in het hele kanaaltje constant. *Onder*: automatisch aan stroming aangepast rooster.

beeld CFD-literatuur, -software en -vacatures is te vinden op [www.cfd-online.com](http://www.cfd-online.com). CFD neemt vandaag de dag een mijns inziens minstens gelijkwaardige plaats in naast experimentele stromingsleer.

En CFD groeit nog steeds. Het wordt nog voortdurend gevoed door verbeteringen in zowel informatica (goedkopere en snellere computers bijvoorbeeld) als numerieke wiskunde (efficiëntere algoritmen bijvoorbeeld). CFD zelf stimuleert ook weer verder onderzoek in informatica en numerieke wiskunde, een vruchtbare wisselwerking. CFD gaat momenteel ook volop de samenwerking aan met andere vakgebieden, zoals bijvoorbeeld sterkteleer (*computational fluid-structure interactions*) en elektromagnetisme (*computational magnetohydrodynamics*). Aan de TU Delft is het onderzoeksverband *Computational Science and Engineering* opgericht. Achttien verschillende rekgroepen uit vijf faculteiten doen hieraan mee, de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek met de Leerstoel Engineering Mechanics en de Leerstoel Aërodynamica. Deze samenwerking gaat hopelijk *nog* meer opleveren dan de optelsom van de delen.

#### Visie op onderwijs en onderzoek

Voor wat de toekomst van CFD betreft heb ik geen bezonken, allesomvattend oordeel, maar een aantal losse, tijdgebonden menin-

gen en voornemens, waarvan ik er nu enige met u wil delen.

Het feit dat commerciële CFD-software een succes is, vormt een onomstotelijk bewijs voor het praktische belang van het theoretische stromingsleerwerk sinds Euler. Het steeds meer beschikbaar komen van CFD-software als klant-en-klaar gereedschap lijkt op het eerste gezicht een bedreiging voor CFD-onderzoek en CFD-ontwikkeling. CFD-onderzoekers en CFD-ontwikkelaars lijken zichzelf werkloos te maken met hun eigen succesvolle werk.

Ik vind de steeds grotere beschikbaarheid van CFD-gereedschap echter een goede ontwikkeling. We moeten vermijden dat iedereen zijn eigen Euler- of Navier-Stokesprogramma schrijft. Het zelf van de grond af aan schrijven en aan de praat brengen van zulke programma's geeft het beste inzicht en is prachtig werk, maar kan gemakkelijk te veel tijd kosten.

#### Onderwijs

Hoe onderwijs te geven in CFD nu het als gemakkelijk beschikbaar, automatisch stuk gereedschap steeds belangrijker wordt? De vraag is niet nieuw. Ze wordt ook gesteld in het voorwoord van de recente CFD-boeken van Wesseling [25] en Roache [26], en heel expliciet in de volgende twee artikelen [27–28]. Mijns inziens is en *blijft* onmisbaar: niet al-

leen feitenkennis maar ook en vooral *inzicht* in de wiskunde- en natuurkundeprijncipes van CFD, niet alleen bij het bedrijven van CFD als wetenschap, maar ook bij het gebruiken van CFD als gereedschap. De CFD-gebruiker zal deze principes goed moeten kennen en begrijpen bij het opstellen van zijn rekenprobleem, bij het kiezen van de numerieke methode om dat probleem op te lossen en — niet in de minste plaats — bij het interpreteren van de rekenresultaten. Beoordeeld moet namelijk achteraf kunnen worden of de resultaten wel of niet aan de verwachtingen voldoen. Indien niet, dan moet begrepen kunnen worden waarom niet. CFD is niet het met grof getallengeweld, bij blinde benadering oplossen van stromingsproblemen, integendeel! Gestimuleerd door de groeiende mogelijkheden van CFD zullen steeds ingewikkelder stromingsproblemen worden beschouwd, problemen die zelfs nog *meer* kennis en begrip van stromingsfysica en numerieke wiskunde zullen eisen. In het onderwijs dat ik geef (het vierdejaars college *Numerical Aircraft Aerodynamics II* en, samen met een zestal jonge TU Delft-collega's, het caput college *Advanced Numerical Techniques for Fluid Flow and Structural Engineering*), wordt groot belang gehecht aan de wiskunde- en natuurkundeprijncipes van CFD-methoden, en daarmee aan de mogelijkheden en beperkingen van deze methoden.

#### Onderzoek

Nu CFD steeds meer volwassen wordt denk ik dat het steeds moeilijker wordt om fundamentele onderzoeksbijdragen aan het vak te leveren. Er is de afgelopen decennia al veel gras voor de voeten weggemaaid. Denk aan het fundamentele werk dat Godunov als promovendus nog betrekkelijk gemakkelijk heeft kunnen doen. (Alhoewel?) CFD-studenten zullen zich een steeds grotere hoeveelheid kennis en inzicht eigen moeten maken alvorens ze zelf aan de slag kunnen. Anderzijds, dankzij de beschikbaarheid van CFD-gereedschap, zijn de toepassingsmogelijkheden nu veel groter dan in Godunovs tijd.

Hoe CFD zich precies zal ontwikkelen, waar en wanneer welke vooruitgang te verwachten is, is niet goed te voorspellen. Dat maakt het vak juist zo spannend en aantrekkelijk.

Het CFD-onderzoek waarbij ik op het CWI betrokken ben, betreft gasstromingen met snelheden van de orde van grootte van de lichtsnelheid, relativistische gasdynamica. Dit onderzoek, in samenwerking met astrofysici van de Universiteit Utrecht, heeft een hoog sciencefictiongehalte als het om

luchtvaart- en ruimtevaarttoepassingen gaat. Onderzoek dat wel realistische toepassingen heeft, is het ontwikkelen van 'vrijoppervlak' Navier-Stokesprogrammatuur. Bij het CWI voor waterstromingen om schepen (het Maritiem Research Instituut Nederland is hierin geïnteresseerd), en aan de TU Delft mogelijk voor gasstralen uit raketmotoren. Bij het CWI is de afgelopen drie jaar al met enig succes gewerkt aan vrijoppervlak stromingen [29–31]. Mogelijk nieuw vrijoppervlak werk is het ontwikkelen van een rekenmethode voor het simuleren van de thermische interactie tussen een gekoelde ruimtevaartconstructie en de hypersonische luchtstroming daar omheen.

Twee promovendi aan de TU Delft, die ik mede begeleid, werken momenteel ook aan een zogenaamde geadjungeerde-vergelijking-methode voor de compressibele Navier-Stokesvergelijkingen. Zo'n methode maakt

het onder andere mogelijk om heel efficiënt de verandering van bijvoorbeeld de draagkracht van een vliegtuigvleugel uit te rekenen bij een klepuitslag. Of om in plaats van wat meestal gedaan wordt — een stroming uitrekenen om bijvoorbeeld een gegeven vliegtuigvleugel — ook andersom te doen: de vorm van de vliegtuigvleugel uitrekenen, waarvoor onder gegeven aanstroombcondities bijvoorbeeld de verhouding draagkracht/luchtweerstand maximaal is: ontwerpen in plaats van simuleren, een unieke mogelijkheid van theoretische stromingsleer. Voor dit andersom rekenen zijn ook interessant: de zogenaamde genetische algoritmen. Hiermee kunnen globale optima worden gevonden. Een nog te verbeteren eigenschap van genetische algoritmen voor aërodynamisch ontwerpen is hun hoge rekenkosten.

Een klassiek onderzoeksgebied binnen

de stromingsleer waar grote bescheidenheid past, maar dat mijns inziens niet helemaal uit de weg kan worden gegaan, is turbulentie. Mijn voorganger Joop Slooff heeft duidelijk het nog tekortschieten van CFD geïllustreerd bij het berekenen van stromingen om vliegtuigen onder grote invalshoek, stromingen waarbij turbulentie een belangrijke rol speelt [32].

Tegenover het zojuist genoemde, enigszins sombere vooruitzicht dat fundamenteel CFD-onderzoek steeds moeilijker wordt, staat het wenkende perspectief dat er in de CFD nog volop onderzoeksvragen zijn. Er zullen altijd stromingsleervragen blijven en er zullen ongetwijfeld nog gelegenheden komen waarop met Orville Wright gesproken kan worden: "Isn't it astonishing that all these secrets have been preserved for so many years just so that we could discover them!"

## Referenties

- 1 T. von Kármán, *Aerodynamics*, McGraw-Hill, New York (1963).
- 2 H. Rouse and S. Ince, *History of Hydraulics*, Dover, New York (1963).
- 3 J.D. Anderson, *A History of Aerodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- 4 L. Euler, 'Principes généraux du mouvement des fluides', *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **11**, p. 274–315 (1755).
- 5 M.D. Salas, 'Leonhard Euler and his contributions to fluid mechanics', *AIAA-paper 88-3564*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1988).
- 6 G.G. Stokes, 'On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, p. 287 (1845).
- 7 C.L.M.H. Navier, 'Mémoire sur les lois du mouvement des fluides', *Mémoires de l'Académie des Sciences*, **6**, p. 389–440 (1822).
- 8 C. Reid, *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*, Springer, New York (1976).
- 9 L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, Cambridge (1922).
- 10 R. Courant, K.O. Friedrichs and H. Lewy, 'Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik', *Mathematische Annalen*, **100**, p. 32–74 (1928).
- 11 W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1990).
- 12 S. Ulam, 'John von Neumann, 1903–1957', *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, p. 1–49 (1958).
- 13 J. von Neumann and R.D. Richtmyer, 'A method for the numerical calculation of shocks', *Journal of Applied Physics*, **21**, p. 232–237 (1950).
- 14 p. 479 in D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer, 1881–1966, Het Heldere Licht van de Wiskunde*, Bert Bakker, Amsterdam (2002).
- 15 G. Alberts, *Jaren van Berekening, Toepassingsgerichte Initiatieven in de Nederlandse Wiskundebeoefening, 1945–1960*, Amsterdam University Press, Amsterdam (1998).
- 16 S.K. Godunov, 'Finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics', *Matematicheskii Sbornik*, **47**, p. 271–306 (1959). Uit het Russisch vertaald bij het Cornell Aeronautical Laboratory.
- 17 G.F.B. Riemann, 'Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite', in: *Gesammelte Werke*, Leipzig (1876). Herdruk: Dover, New York (1953).
- 18 B. van Leer, 'An introduction to the article "Reminiscences about difference schemes", by S.K. Godunov', *Journal of Computational Physics*, **153**, p. 1–5 (1999).
- 19 S.K. Godunov, 'Reminiscences about difference schemes', *Journal of Computational Physics*, **153**, p. 6–25 (1999).
- 20 B. van Leer, 'Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method', *Journal of Computational Physics*, **32**, p. 101–136 (1979). Herdruk: *Journal of Computational Physics*, **135**, p. 229–248 (1997).
- 21 B. van Leer, 'Flux-vector splitting for the Euler equations', *Lecture Notes in Physics*, **170**, p. 507–512, Springer, Berlin (1982).
- 22 P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*, Wiley, Chichester (1992).
- 23 U. Trottenberg, C.W. Oosterlee and A. Schüller, *Multigrid*, Academic Press, New York (2001).
- 24 J. Wackers and B. Koren, 'A simple and efficient space-time adaptive grid technique for unsteady compressible flows', *AIAA-paper 2003-3825*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (2003).
- 25 P. Wesseling, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Springer, Berlin (2001).
- 26 P.J. Roache, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque, NM (1998).
- 27 D. Pelletier, 'Should we still teach CFD to our students?', *AIAA-paper 98-0824*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1998).
- 28 B. van Leer, 'CFD education: past, present, future', *AIAA-paper 99-0910*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1999).
- 29 E.H. van Brummelen, H.C. Raven and B. Koren, 'Efficient solution of steady free-surface Navier-Stokes flow', *Journal of Computational Physics*, **174**, p. 120–137 (2001).
- 30 B. Koren, M.R. Lewis, E.H. van Brummelen and B. van Leer, 'Riemann-problem and level-set approaches for homentropic two-fluid flow computations', *Journal of Computational Physics*, **181**, p. 654–674 (2002).
- 31 E.H. van Brummelen and B. Koren, 'A pressure-invariant conservative Godunov-type method for barotropic two-fluid flows', *Journal of Computational Physics*, **185**, p. 289–308 (2003).
- 32 J.W. Slooff, *Spelen met lucht en water, 35 jaar toegepaste numerieke stromingsleer*, afscheidsrede, Technische Universiteit Delft (2002).
- 33 [homepages.cwi.nl/~pieth](http://homepages.cwi.nl/~pieth)
- 34 [homepages.cwi.nl/~barry](http://homepages.cwi.nl/~barry)